Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen III (1996), pp.25-36

EL CONJUNTO DE MANDELBROT

GUSTAVO RUBIANO(*)

Resumen. Se realiza una revisión bibliográfica y conceptual de la base matemática teórica escondida detrás del conjunto de Mandelbrot y los objetos fractales.

Abstract. An overview of the mathematical foundations hidden behind Mandelbrot's set and fractal images is presented.
Keywords. Fractals, Julia sets, Mandelbrot sets, complex analysis.

Los buenos diseños gráficos en matemáticas siempre han sido un reto para los matemáticos y, cuando logran ser una ayuda en la explicación de conceptos difíciles, son entonces aún más hermosos. Quizás hoy en día el gráfico de moda es el conjunto de Mandelbrot admirado por profanos y no profanos; mas aún, cuando, con la ayuda del "zoom" en la pantalla del computador personal, es posible ver detalles de él que no llenarían el área de un átomo de hidrógeno.

Pero, ¿qué hay detrás del conjunto de Mandelbrot?, ¿cómo es su génesis?: es algo que casi siempre pasa inadvertido. Con esta nota se pretende dar de manera accesible respuesta a estos dos interrogantes y mostrar cómo, despues de 50 años, la teoría de la iteración de funciones analíticas regresa a escena gracias a la posibilidad de hacer experimentos en el computador.

(*)Texto recibido 1/3/96, revisado 10/11/96. Gustavo Rubiano, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional. e-mail: gurubi@ciencias.ciencias.unal.edu.co. Este es el texto de una conferencia dictada dentro del ciclo "Las conferencias de los Viernes" del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

1. Conjuntos de Julia

El estudio de este tema comenzó durante la primera guerra mundial con los trabajos independientes de Pierre Fatou (1878-1929) publicados en [8,9,10] durante 1919–1920 y Gaston Julia (1893-1958) publicados en [11] en 1918 –cada uno con más de 100 hojas–. El primero de ellos trabajaba en el observatorio de París, mientras el segundo se recuperaba en un hospital militar de heridas de guerra que a la postre le harían perder su nariz.

El objetivo era estudiar la dinámica de un sistema discreto sobre la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, –la cual es homeomorfa a la esfera bidimensional S^2, usando la proyección estereográfica e identificando el polo norte con el punto al infinito–. El sistema surge al considerar una función racional $R(z)$ de $\mathbb{C}$ en sí mismo. Esta función puede ser expresada como cociente de polinomios

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)},\ q(z) \neq 0,$$

donde $p(z)$ y $q(z)$ no poseen factores comunes.

El invariante más sencillo de una funcion racional R es su grado, $grad(R)$, definido como

$$grad(R) = \max\{grado(p),\ grado(q)\},$$

el cual puede ser interpretado de manera equivalente como el número de preimágenes de cualquier valor en $\mathbb{C}$. Dentro de este contexto se utilizará la teoría de Fatou-Julia para funciones R con grado mayor o igual a 2. El sistema dinámico se forma mediante la aplicación reiterada de la función R sobre $\mathbb{C}$.

1 Definición. Dado un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, la sucesión $0^+(z_0) = \{z_n\}$ es definida inductivamente por

$$z_{n+1} = R(z_n),$$

con lo cual

$$0^+(z_0) = \left\{z_0, R(z_0), R \circ R(z_0), ..., R^{(n)}(z_0), R^{(n+1)}(z_0), ...\right\}$$

es llamada la órbita –hacia adelante– de z_0 por la función R. Análogamente definimos a $0^-(z_0)$ como,

$$0^-(z_0) = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, R^{(k)}(z) = z_0,\ \text{para } k = 0, 1, 2, ...\right\},$$

resultando ser la unión de todas las preimágenes iteradas de R a partir de z_0.

Con la definición de $0^+(z_0)$ y $0^-(z_0)$ surgen de manera natural algunas preguntas:

* ¿Cuáles son los puntos límites para $0^+(z_0)$?

* ¿Qué propiedades topológicas y analíticas tiene el conjunto de puntos límites para $0^+(z_0)$?

* ¿Cómo se distribuyen $0^+(z_0)$, $0^-(z_0)$ en el plano –cuál es su densidad–?

La manera más natural de distinguir órbitas es contando el número de puntos que posee la sucesión.

2 Definición. Si $z_n = z_0$ para algún n, entonces z_0 es un punto periódico y si n es el primer número natural que satisface $z_n = z_0$, diremos que $0^+(z_0) = \{z_0, z_1, ..., z_{n-1}\}$ es periódica, con periodo n.

Cuando el periodo es uno, decimos que z_0 es un punto fijo para R. Los puntos periódicos guiarán este estudio; para ilustración de los conceptos se considera a la función $R(z) = z^2$ en los siguientes ejemplos.

3 Ejemplo. Sea $R(z) = z^2$. El comportamiento de una órbita dependerá de donde esté ubicado el punto z_0 con respecto al círculo unitario S^1. Si z_0 está dentro de S^1, $|z_0| < 1$ entonces la órbita tendrá como límite al origen $(0,0)$ el cual es un punto fijo para R. Si z_0 está fuera de S^1, $|z_0| > 1$ entonces la órbita cada vez se alejará más y más con lo cual tendrá a ∞ como punto límite. Sólo resta analizar un punto z_0 que pertenezca a S^1, esto es, si $|z_0| = 1$, es decir $z_0 = e^{i\theta}$, tenemos que $R(e^{i\theta}) = e^{i2\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$, con lo cual la órbita no abandonará a S^1.

A continuación se parte en clases disyuntas al conjunto de las funciones racionales por medio de la siguiente definición.

4 Definición. Dadas dos funciones racionales $R, S : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ diremos que ellas son conjugadas si existe una transformación de Möbius $M : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ (M por definición es biyectiva y racional e induce un difeomorfismo analítico sobre la esfera de Riemann) tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{R} & \overline{\mathbb{C}} \\ {\scriptstyle M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle M} \\ \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow[S]{} & \overline{\mathbb{C}} \end{array}$$

Nótese que si R, S son conjugadas, entonces también lo son $R^{(n)}$, $S^{(n)}$ y, como $R = M^{-1} \circ S \circ M$, un punto z será periódico en R si y sólo si $M(z)$ lo

es en S, con lo cual cualquier pregunta referente al sistema generado por z en R, puede ser referida al sistema generado por $M(z)$ en S.

5 Ejemplo. Para el conjunto de Mandelbrot solo interesan las funciones racionales dadas por los polinomios cuadráticos $R(z) = az^2 + 2bz + d$, pero gracias al anterior concepto de conjugación bastará estudiar polinomios de la forma $p(z) = z^2 + c$, ya que dado R, al considerar la función $M(z) = az + b$ y $c = ad + b - b^2$, tenemos que R es conjugado a p; en efecto:

$$M^{-1} \circ p \circ M(z) = M^{-1}\left((az+b)^2 + c\right) = M^{-1}\left(a^2z^2 + 2abz + b^2 + c\right)$$
$$= \frac{\left(a^2z^2 + 2abz + b^2 + c\right) - b}{a} = R(z).$$

Lo anterior garantiza que toda la dinámica de los polinomios cuadráticos está basada en la dinámica de los representantes de clase, de la forma $p(z) = z^2 + c$, los cuales ya no toman tres parámetros, sino tan solo uno.

Para estudiar la dinámica de las funciones racionales, Julia y Fatou descompusieron al plano $\mathbb{C}$ en dos conjuntos complementarios J_R, F_R –donde R es la función racional en cuestión, y la notación moderna J, F cuando no se necesite precisar a R, recuerda a sus creadores–. Para definir a F_R, se recuerdan los siguientes conceptos del análisis complejo.

6 Definición. Dado un subconjunto U abierto en $\mathbb{C}$ y una familia $\mathcal{F} = \{f_i \mid i \in I\}$ de funciones analíticas complejas definidas sobre U, se dice que $\mathcal{F}$ es una familia normal de funciones, si cada sucesión (f_n) –que podemos extraer de $\mathcal{F}$– admite una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos de U.

La función límite de la definición anterior no tiene por qué ser un elemento de la familia. Por ejemplo, $\mathcal{F}$ puede estar formada por todas las iteradas de $f(z) = z^2$, definidas sobre un abierto U contenido en S^1; para este caso la función límite es la función constante cero; no pertenece a $\mathcal{F}$ y sin embargo $\mathcal{F}$ es normal.

¿Pero cómo relacionar esta propiedad de normalidad con una propiedad dinámica? La conexión la encontraron Julia y Fatou, a través del teorema de Arzelá, el cual proporciona un puente entre familias normales de funciones y familias equicontinuas.

7 Definición. Sea (X, d) un espacio métrico. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones en X, $\mathcal{F} = \{f_i : X \to X\}$ es una familia equicontinua si y sólo si dado cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon, x) > 0$ tal que, para todo y, $d(x, y) < \delta$ implica $d(f_i(x), f_i(y)) < \epsilon$ para cada i.

8 Teorema (Arzelá-Ascoli). *Una familia $\mathcal{F} = \{f_i : U \longrightarrow \mathbb{C}\}$ de funciones analíticas es normal si y solo si es equicontinua para cada subconjunto compacto de U.*

Para la demostración de este teorema y una discución detallada de familias normales, véase [1].

Dada una función racional R con $grado(R) \geq 2$, –así incluimos los polinomios cuadráticos– la familia $\mathcal{F} = \left\{R, R^{(2)}, \cdots\right\}$ de sus iteradas es la encargada de definir a F_R, el conjunto de Fatou de R. En efecto:

9 Definición. Un punto $z \in \mathbb{C}$, se llama *estable* para R, si y sólo si, existe una vecindad V_z sobre la cual la familia de las restricciones a V_z de las iteradas de R, $\left\{R^{(n)} \,|V_z\right\}$ es una familia normal.

Se define a F_R el conjunto de Fatou para R como

$$F_R = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ es estable para } R\}.$$

El conjunto de Julia para R, J_R, es el complemento de F_R, llamado también el conjunto de los puntos *inestables*. Nótese que, por definición, F_R es siempre abierto –ya que si z es estable y x es suficientemente cercano a z, por estabilidad x también es estable– aunque en algunos casos no contenga elementos. Además, F_R es completamente invariante, en el sentido de que $R(F_R) \subset F_R$, y, $R^{-1}(F_R) \subset F_R$. Por tanto lo mismo sucede para J_R.

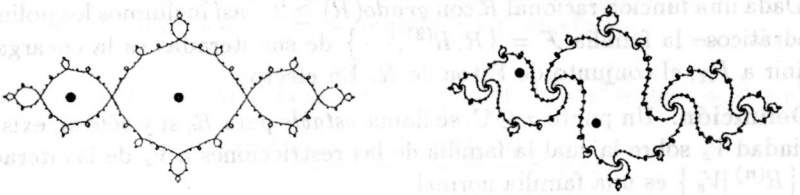
10 Ejemplo. Para $R(z) = z^2$ se toma un punto z_0 dentro del círculo unidad. Entonces existe un disco abierto U alrededor de z_0 sobre el cual la sucesión $\left\{R^{(n)} \,|_U\right\}$ converge a la función constante $c(z) = 0$ para todo $z \in U$. Por lo tanto, el interior de S^1 está contenido en F. De manera similar, el exterior de S^1 está contenido en F, donde la función límite es la constante de valor ∞. En este caso $S^1 = J_R$, ya que $\left\{R^{(n)}\right\}$ no es equicontinua sobre ningún abierto que interseque a S^1.

En general, en contravía con el ejemplo anterior, los conjuntos J no son fáciles de visualizar y son aceptados como formas fractales en su mayoría; esto se debe a que el sistema dinámico formado por las iteradas, restringidas al conjunto J, es muy sensible a los parámetros iniciales.

2. La dinámica vs. la topología

A continuación, se muestra cómo los trabajos de Fatou y Julia se dedican a entrelazar la teoría de los puntos periódicos de la definición 2, con la definición 9 para J y F, con el fin de obtener una nueva descripción tanto para J como

para F, utilizando conceptos topológicos.



($Fig.1$)

Conjuntos de Julia para $p(z) = z^2 + c$ con $c = -1, -0.83 + 0.16i$

11 Definición. Dado un punto periódico z_0 con periodo n, se define el número λ, llamado el *valor propio* de la órbita periódica o del ciclo asociado a z_0, como:

$$\lambda = \left(R^{(n)}\right)'(z_0) = \prod_{j=0}^{n-1} R'(z_j), \quad z_j \in \{z_0, z_1, ..., z_{n-1}\}, \; z_i \in R^{(i)}(z_0).$$

Esto es, λ es el producto de las derivadas de R a lo largo de la órbita, por lo que no depende del punto elegido en la órbita, sino de la órbita en sí.

12 Definición. Un punto periódico o una órbita periódica $0^+(z_0)$ es:

(1) Atrayente si $0 < |\lambda| < 1$,
(2) Superatrayente si $\lambda = 0$,
(3) Repelente si $|\lambda| > 1$,
(4) Indiferente si $|\lambda| = 1$.

De la definición anterior, se deduce que un ciclo es superatrayente si y sólo si existe un punto crítico ω –la derivada se anula, esto es $R'(\omega) = 0$– que pertenece a la órbita.

13 Ejemplo. Para los polinomios $p_c(z) = z^2 + c$, la serie de Taylor de $p^{(k)}$ en un punto periódico z_0 con valor propio λ, comienza como $p^{(k)}(z_0 + u) = z_0 + \lambda u \cdots$, así que, si $|\lambda| < 1$ y z es suficientemente cercano a z_0, entonces la iterada $p^{(k)}(z)$ es más cercana a z_0 que a z; $p^{(2k)}(z)$ lo será aún más, etcétera.

Esto explica el nombre: ciclo atrayente. Si $|\lambda| > 1$ y z es suficientemente cercano a z_0, entonces la iterada $p^{(k)}(z)$ se aleja más de z_0 que de z. Esto explica el nombre: ciclo repelente.

Los puntos fijos de p_c son las soluciones de la ecuación $z^2 + c = z$, esto es:

$$z = \left(1 \pm \sqrt{1-4c}\right)/2, \text{ con valores propios } \lambda = 1 \pm \sqrt{1-4c}.$$

Los puntos de periodo 2 son las soluciones de la ecuación $\left(z^2+c\right)^2 + c = z$, los cuales no son puntos fijos:

$$z = \left(-1 \pm \sqrt{-3-4c}\right)/2 \text{ con valor propio } \lambda = 4(1+c).$$

Cada polinomio tiene infinitos ciclos: atrayentes, repelentes o indiferentes.

En 1905, utilizando el Teorema del Valor Medio y el Teorema de Arzelá, Fatou [8] demostró el siguiente resultado:

14 Proposición. Si $0^+(z_0)$ es una órbita periódica (super) atrayente, entonces ella está contenida en F. Si $0^+(z_0)$ es repelente, entonces está contenida en J.

Así, cada punto periódico repelente está en J, y como J es cerrado, la clausura de los puntos repelentes también estará contenida en J. Pero lo sorprendente es que

$$J = \text{ clausura } \{\text{ciclos repelentes}\}.$$

Aún más: dado cualquier punto $z_0 \in J_R$, el conjunto de sus preimágenes forma un conjunto denso en J_R, esto es:

$$J_R = \text{ clausura } \left(\bigcup_{n\geq 0} R^{-n}(z_0)\right), \text{ para cualquier } z_0 \in J_R.$$

Para una demostración de estos hechos ver [3, p.107], [4, p.64]. Esta última igualdad es la que usualmente se utiliza para generar los gráficos de un conjunto de Julia, ya que basta encontrar un punto repelente y entonces calcular su órbita inversa, lo cual produce un conjunto denso en J. En 1918-1919 P. Fatou y G. Julia, probaron otro resultado, el cual da aún más importancia al comportamiento de los puntos críticos. Antes de enunciarlo se tiene la siguiente definición:

15 Definición. Dado z_0 en $\mathbb{C}$, definimos la *cuenca de atracción* de z_0, como:

$$A(z_0) = \left\{z \middle| \lim_{n\to\infty} R^{(n)}(z) = z_0\right\},$$

esto es, $A(z_0)$ es el conjunto de todos los puntos del plano que a la larga son atraídos a z_0 por medio de la iteración de la función R. Si $\{z_0, ..., z_{n-1}\}$ es un ciclo atrayente, entonces definimos

$$A(z_0) = \bigcup_{k=0}^{n-1} A(z_k).$$

16 Teorema (Fatou). Sea z_0 un punto fijo atrayente de R. Entonces,

(1) $\partial A(z_0) = J_R$, donde $\partial A(z_0)$ denota la frontera de $A(z_0)$.
(2) Cada ciclo atrayente de una función racional, atrae al menos un punto crítico.

Así, un polinomio de grado $d \geq 2$ puede tener a lo más $d-1$ ciclos atrayentes en el plano. En particular los polinomios cuadráticos p_c pueden tener a lo más un ciclo atrayente, con lo cual se puede afirmar que *el comportamiento de la dinámica es dominado por el comportamiento de los puntos críticos.*

Para los polinomios cuadráticos, el plano se descompone en dos conjuntos disyuntos:

$$A_p(\infty) = \left\{ z \in c \left| p^{(n)}(z) \to \infty \right. \right\} \text{ y } K_p = A_p(\infty)^c,$$

es decir, los puntos con órbitas no acotadas y los puntos con órbitas acotadas. K_p es conocido como el conjunto lleno de Julia, dado que $\partial K_p = \partial A_p = J_p$.

Por último, se llega al teorema central, otra vez con los puntos críticos.

17 Teorema (Fatou y Julia [10],[11]). Sea Ω_p el conjunto de los puntos críticos para un polinomio p. Entonces:

(1) $\Omega_p \subset K_p$ si y sólo si J_p es conexo.
(2) Si $\Omega_p \cap K_p = \phi$, entonces J_p es un conjunto de Cantor –totalmente disconexo, compacto y perfecto–.

Como en el caso de un polinomio cuadrático existe tan solo un punto crítico, entonces el conjunto de Julia es, o bien conexo, o bien un conjunto de Cantor. Pero por fortuna esta dicotomía también se puede expresar en términos del único punto crítico 0. Esto es, 0 pertenece o no pertenece a K_p, es decir, la órbita en el punto 0 es acotada o no lo es. Si la órbita es acotada, entonces el conjunto de Julia correspondiente a p_c es conexo; en caso contrario el conjunto de Julia es de Cantor.

Con todo lo anterior se puede entrar a definir al conjunto tema de esta nota.

3. El conjunto de Mandelbrot

Dado el polinomio cuadrático $p_c(z) = z^2 + c$ con $c = a + bi$, c variando en $\mathbb{C}$ (J_c denotará a J_{p_c}) definimos:

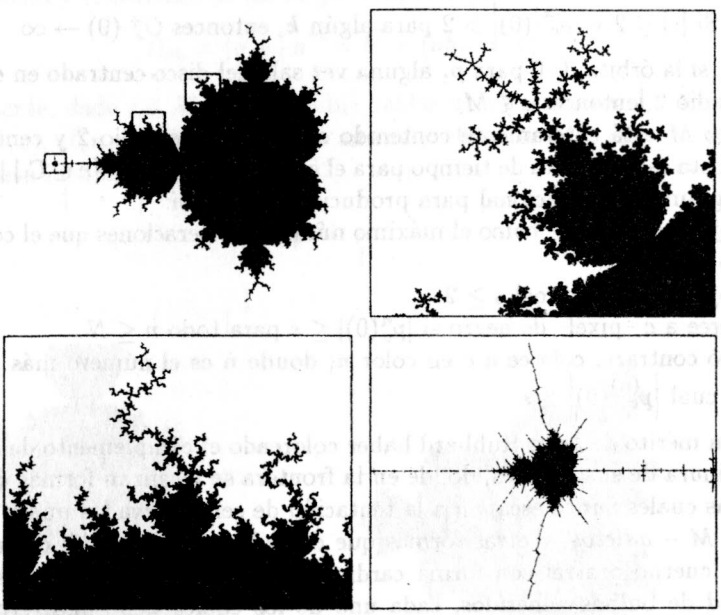
$$M = \{c \in \mathbb{C} | J_c \text{ es conexo } \} \text{ o, lo que es equivalente,}$$
$$M = \{c \in \mathbb{C} | p_c^{(n)}(0) \not\to \infty\},$$
$$M = \{c \in \mathbb{C} | c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \cdots \not\to \infty\}.$$

Esta última igualdad da lugar al algoritmo computacional que nos lleva a graficar a M. El "c- proceso" consiste en comenzar con 0, elevar al cuadrado y añadir c, elevar al cuadrado y añadir c, etc.

$$0 \to c \to c^2 + c \to \left(c^2 + c\right)^2 + c, \cdots$$

Esto divide al plano en dos conjuntos disyuntos, uno de los cuales es M; A. Douady y J. H. Hubbard [6] lo llamaron el conjunto de Mandelbrot.

18 Nota. En M varía el parámetro c del polinomio p_c, mientras que en el conjunto de Julia de $p_c = z^2 + c$, $J_c = \partial \left\{ z \in \mathbb{C} \left| p_c^{(n)}(z) \not\to \infty \right. \right\}$ varía el plano y c está fijo.



(*Fig.*2)

M y algunos detalles de su frontera

¿Cómo graficar a M?, ¿cómo graficar a J_c? Para J_c ya se tenía una respuesta: encontrar un $z_0 \in J_c$ y observar que su órbita inversa $0^-(z_0)$ es densa en J_c. Este método es conocido como el método de la iteración inversa MII.

A manera de información, el conjunto lleno de Julia K_c, para $z^2 + c$ – los puntos que no escapan al infinito– va a estar contenido en el disco centrado en el origen y con radio $s = \max\{2, |c|\}$. En efecto, para $|z| > s$ tenemos la siguiente desigualdad,

$$\frac{|z^2 + c|}{|z|} \geq |z| - \frac{|c|}{|z|} \geq |z| - 1 > 1,$$

luego si $|z| > s$ entonces $0_c^+(z) \to \infty$, esto es, z está en K_c.

Para graficar a M, hay que concentrarse en el punto 0. Dado el polinomio $p_c(z) = z^2 + c$, su comportamiento es determinado por el comportamiento del punto crítico 0. Se trata de saber si la órbita en 0 escapa con el tiempo o no! Hay que restringir la cantidad de parámetros c para los cuales J_c es conexo.

(1) Si $|c| > 2$, entonces $\left|p_c^{(2)}(0)\right| > |c|$, y, $O_c^+(0) \to \infty$.

(2) Si $|c| \leq 2$ y $\left|p_c^{(k)}(0)\right| > 2$ para algún k, entonces $O_c^+(0) \to \infty$.

Esto es, si la órbita de 0 para p_c alguna vez sale del disco centrado en el origen y con radio 2, entonces $c \notin M$.

Luego M está enteramente contenido en el disco de radio 2 y centrado en $(0,0)$. Esta es una cuota de tiempo para el computador, $M \subset \{c \in \mathbb{C} \mid |c| \leq 2\}$. Un programa computacional para producir M sería así:

1. Escoja un entero N, como el máximo número de iteraciones que el computador debe efectuar.
2. Escoja un número real $s \geq 2$.
3. Coloree a c –pixel– de negro si $|p_c^n(0)| \leq s$ para todo $n \leq N$.
4. De lo contrario coloree a c en color n, donde n es el número más pequeño para el cual $\left|p_c^{(n)}(0)\right| > s$.

Es un mérito de John Hubbard haber coloreado el complemento de M, para ver la finura de sus detalles, donde en la frontera se alcanzan formas casi fractales, las cuales nunca escapan a la tentación de ser observadas una y otra vez por los M – *adictos*, y otras formas que describen la parte más difundida de M: un cuerpo central con forma cardioide en derredor del cual existen una cantidad de bulbos adheridos, cada uno de los cuales tiene una terminación en forma de dendrita o antena, y a su vez cada bulbo tiene nuevamente en su frontera una cantidad de bulbos anexados a él y así sucesivamente. En cada una de las dendritas es posible encontrar copias del mismo M, lo que le confiere su estructura fractal; M es como un mapa con la historia de la dinámica de los polinimios p_c. Fue B. Mandelbrot quien por primera vez observó a M, obviamente de manera monocromática. A pesar de su apariencia, A. Douady [6] mostró que M es conexo. M es cerrado por definición –pues su complemento es abierto, ya que si para un c el $c-$*proceso* no es acotado, tampoco lo es para valores cercanos a c –y por tanto es compacto –Heine-Borel–.

4. Generalizaciones de M

La idea de generar M a partir de $p_c(z) = z^2 + c$, donde c varía, se puede generalizar a polinomios de grado mayor que 2. Sean $p(z, c; n) = z^n + c$ y $q(z, c; n) = \overline{z}^n + c$, donde $\overline{z}$ es el conjugado de z. Se definen los siguientes conjuntos:

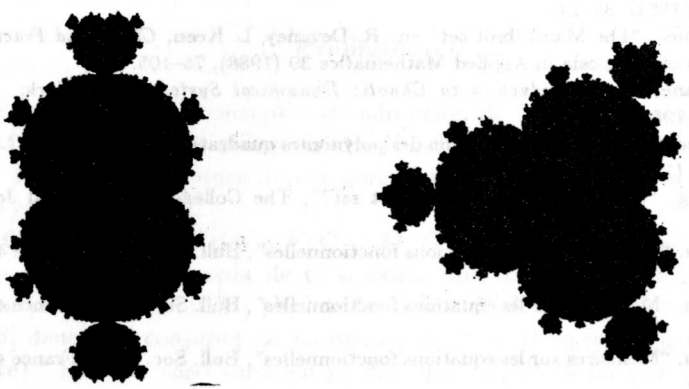
(1) $M(n) = \{c \in \mathbb{C} \mid p^{(k)}(0, c; n) \not\to \infty\}$,
(2) $\overline{M}(n) = \{c \in \mathbb{C} \mid q^{(k)}(0, c; n) \not\to \infty\}$,

llamados los *conjuntos generalizados de Mandelbrot y Mandelbarra* respectivamente. Con base en la geometría de los gráficos, se tiene la siguiente observación [14].

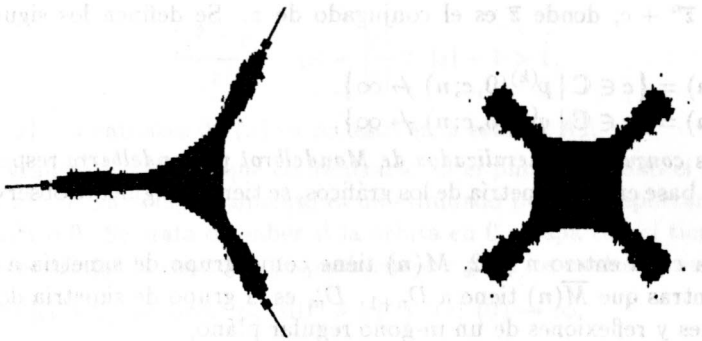
(1) Para cada entero $n \geq 2$, $M(n)$ tiene como grupo de simetría a D_{n-1} mientras que $\overline{M}(n)$ tiene a D_{n+1}. D_m es el grupo de simetría de rotaciones y reflexiones de un m-gono regular plano,

$$D_m = \{a, b \mid a^m = b^2 = (ab)^2 = 1\}.$$

Similarmente, dado $c \in M(n)$, es posible hablar de los respectivos conjuntos de Julia $J(n, c)$, $\overline{J}(n, c)$. Una referencia amena y elegante para este tema donde se contrasta la simetría y el caos es [2].



(*Fig.*3)
Gráficos de $M(3)$, $M(4)$



(*Fig.*4)
Gráficos de $\overline{M}(2)$, $\overline{M}(3)$

Referencias

1. L. Ahlfors, *Complex Analysis*, New York: Mc Graw-Hill, 1979.
2. C. Alexander, I. Gibli, D. Newton, " Simmetry Groups and fractals", The Mathematical Intelligencer 14 No. 2 (1992), 32–38.
3. P. Blanchard, "Complex analytic dynamics on the Riemann Sphere", Bull. Amer. Math. Soc. 11 (1984), 85–141.
4. B. Branner, "The Mandelbrot set" en: R. Devaney, L. Keen, *Chaos and Fractals*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics 39 (1988), 75–105.
5. R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, New York: Addison-Wesley, 1989.
6. A. Douady, J.H. Hubard, "Iteration des polynomes quadratiques complexes", C. R. Acad. Sci. 294 (1982), 123–126.
7. J. Ewing, "Can we see the Mandelbrot set?", The College Mathematical Journal 26 (1995).
8. P. Fatou, "Memoires sur les equations fonctionnelles", Bull. Soc. Math. France 47 (1919), 161–271.
9. P. Fatou, "Memoires sur les equations fonctionnelles", Bull. Soc. Math. France 47 (1920), 33–94.
10. P. Fatou, "Memoires sur les equations fonctionnelles", Bull. Soc. Math. France 47 (1919), 208–314.
11. G. Julia, "Memoires sur l'iteration des fonctions rationelles", J. Math. Pures. Appl. 8 (1918), 47–245.
12. Y. Fisher, "Exploring the Mandelbrot set", Appendix D, en: H.O. Peijan (ed), *The Science of Fractals*, New York: Springer-Verlag, 1988, 287–296.
13. R. Monafo, "Super Mandelzoom", Program for the Macintosh, Public domain.
14. X. Sheng, M. Spurr, "Simmetries of fractals", The Mathematical Intelligencer 18 No. 1 (1996), 35–42.